то многообразие M_n оказывается наделенным структурой почти произведения (при $\varepsilon=+1$) или почти комплексной структурой (при $\varepsilon=-1$) [2].

При исследовании комплекса K гиперквадрик в аффинном пространстве A_n также возникает риманова связность Γ, не являющаяся в общем случае связностью Леви-Чивита. Выбором репера $R=\{A,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ приводим уравнение гиперквадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса K соответственно к виду:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^n)^2-1=0, \qquad (25)$$

$$\omega^\alpha_\beta+\omega^\beta_\alpha=2b^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma. \qquad (26)$$

Полагая

$$\hat{\omega}^\alpha_\beta=\frac{1}{2}(\omega^\alpha_\beta-\omega^\beta_\alpha), \qquad (27)$$

находим

$$d\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\hat{\omega}^\alpha_\beta+\frac{1}{2}S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma, \qquad (28)$$

$$d\hat{\omega}^\beta_\alpha=\hat{\omega}^\gamma_\alpha\wedge\hat{\omega}^\beta_\gamma+\frac{1}{2}R^\beta_{\alpha\gamma\eta}\omega^\gamma\wedge\omega^\eta, \qquad (29)$$

где

$$S^\alpha_{\beta\gamma}=b^\alpha_{\beta\gamma}-b^\alpha_{\gamma\beta},\quad R^\beta_{\alpha\gamma\eta}=b^\tau_{\alpha\gamma}b^\beta_{\tau\eta}-b^\tau_{\alpha\eta}b^\beta_{\tau\gamma} \qquad (30)$$

-тензоры кручения и кривизны Γ.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.-Тр.геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, т.6, с.113-134.

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии, т.9. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1979.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

М.Н. Марюков

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ П-ПРОСТРАНСТВ

В данной работе рассматриваются некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и $\bar{\Omega}$ пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Находится необходимое и достаточное условие их соответствия в отображении f.

В евклидовом пространстве E_n даны две области Ω и $\bar{\Omega}$ и диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar{\Omega}$. Предполагается, что в области Ω задано распределение Δ_p $(1\le p<n)$, а в области $\bar{\Omega}$ -распределение $\tilde{\Delta}_p$.

Пусть в главном нормальном пространстве N_q распределения Δ_p [2] зафиксировано поле одномерной нормали $[x,\vec{n}_0]$, где $\vec{n}_0$ -орт этой нормали. Для точки F, принадлежащей данной нормали, имеем $\vec{F}=\vec{x}+\rho\vec{n}_0$. Направления кривизны площадки $\Delta_p(x)$ относительно нормали $[x,\vec{n}_0]$ ([1], [2]) определяются требованием $d\vec{F}\in\Delta_{n-p}(x)$ при $d\vec{x}\in\Delta_p(x)$,

$$d\vec{F}\in\Delta_{n-p}(x) \quad \text{при} \quad d\vec{x}\in\Delta_p(x), \qquad (1)$$

где $\Delta_{n-p}(x)$ -площадка, ортогонально дополнительная к $\Delta_p(x)$. В области Ω выберем подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$, где единичные векторы $\vec{e}_i\in\Delta_p(x)$, $\vec{e}_\alpha=\Delta_{n-p}(x)$, причем $\vec{e}_{\alpha_0}=\vec{n}_0$ $(i=1,\dots,p;\ \alpha=p+1,\dots,n)$. Требование (1) приводит к системе $\omega^i+\rho\,\omega^i_{\alpha_0}$. Дифференцирование тождеств $\vec{e}_{\alpha_0}\cdot\vec{e}_i=0$ дает $\gamma_{ij}\omega^j_{\alpha_0}+\omega^{\alpha_0}_i=0$. Отсюда следует, что формы $\omega^j_{\alpha_0}$-главные и $\omega^j_{\alpha_0}=-\gamma^{j\ell}\Lambda^{\alpha_0}_{\ell L}\omega^L$ $(L=1,2,\dots,n)$. Здесь $\Lambda^{\alpha_0}_{\ell L}$-подобъект первого фундаментального объекта распределения Δ_p. Учитывая, что при $d\vec{x}\in\Delta_p(x)$ формы ω^α равны нулю, для определения направлений кривизны площадки $\Delta_p(x)$ имеем систему

$$(\delta^i_j+\rho\,a^i_j)\omega^j=0, \qquad (2)$$

где

$$a^i_j = -\gamma^{i\ell}\Lambda^{\alpha_0}_{\ell j} \qquad (3)$$

есть аффинор. Интегральные кривые I-распределений, определяемых собственными векторами поля этого аффинора, — p-ткань Σ_p линий кривизны распределения Δ_p относительно нормали $[x, \vec{e}_{\alpha_0}]$ ([1],[2]). Если в главном нормальном пространстве $\widetilde{N}_q$ распределения $\widetilde{\Delta}_p$ выбрано поле одномерной нормали $[y, \vec{n}_0]$, то аналогично можно определить p-ткань $\widetilde{\Sigma}_p$ линий кривизны этого распределения относительно нормали $[y, \vec{\bar{n}}_0]$. В отображении f p-ткань Σ_p переходит в p-ткань $\bar{\Sigma}_p$, принадлежащую распределению $\bar{\Delta}_p = f_{*x}(\Delta_p)$, а p-ткань $\widetilde{\Sigma}_p$ переходит в отображении f^{-1} в p-ткань $\bar{\bar{\Sigma}}_p$, принадлежащую распределению $\bar{\Delta} = f^{-1}_*(\widetilde{\Delta}_p)$. Каждой нормали распределения $\Delta_p(\widetilde{\Delta}_p)$ соответствует определенная нормаль распределения $\bar{\Delta}_p(\bar{\bar{\Delta}}_p)$. Действительно, пусть $n \in \Delta_{n-p}(x)$, а следовательно $\vec{n} = p^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\vec{\bar{n}} = f_{*x}(\vec{n}) = p^\alpha \vec{\bar{e}}_\alpha$, где $\vec{\bar{e}}_\alpha = f_{*x}(\vec{e}_\alpha)$. Рассмотрим вектор

$$\vec{\hat{n}} = \vec{\bar{n}} - p^\alpha \bar{\gamma}^{ij}\gamma_{\alpha j}\vec{\bar{e}}_i, \qquad (4)$$

где $\vec{\bar{e}}_i = f_{*x}(\vec{e}_i)$, $\bar{\gamma}^{ij}$ — контравариантные компоненты метрического тензора распределения $\bar{\Delta}_p$, а $\bar{\gamma}_{\alpha j} = \vec{\bar{e}}_\alpha \cdot \vec{\bar{e}}_j$. Имеем $\vec{\hat{n}} \cdot \vec{\bar{e}}_\ell = 0$, следовательно, $\vec{\hat{n}} \in \hat{\Delta}_{n-p}(y)$, где $\hat{\Delta}_{n-p}(y)$ — площадка, ортогонально дополнительная к $\bar{\Delta}_p(y)$. Дифференцирование выражения (4) по вторичным параметрам дает $\delta\vec{\hat{n}} = 0$, следовательно, в области Ω имеем поле инвариантной нормали $[y, \vec{\hat{n}}]$ распределения Δ_p. Как показывает соотношение (4), векторам базиса $\vec{e}_\alpha$ соответствуют векторы $\vec{\hat{e}}_\alpha = \vec{\bar{e}}_\alpha - \bar{\gamma}^{ij}\gamma_{\alpha j}\vec{\bar{e}}_i$. Они линейно независимы и образуют базис площадки $\hat{\Delta}_p(y)$.

Аналогичным образом каждой нормали распределения $\hat{\Delta}_p$ будет соответствовать некоторая нормаль распределения $\widetilde{\Delta}_p$.

Выясним, в каком случае p-ткань линий кривизны $\Sigma_p(\widetilde{\Sigma}_p)$ распределения $\Delta_p(\widetilde{\Delta}_p)$ относительно нормали $[x, \vec{e}_{\alpha_0}]$ переходит в отображении $f\,(f^{-1})$ в p-ткань линий кривизны распределения $\Delta_p(\bar{\Delta}_p)$ относительно соответствующей нормали $[y, \vec{\hat{e}}_{\alpha_0}]$ $([x, \vec{\hat{e}}_{\alpha_0}])$.

Рассмотрим решение этой задачи для распределения Δ_p

(для распределения $\widetilde{\Delta}_p$ оно аналогично). Поместим векторы $\vec{e}_i$ репера R^x на касательных к линиям p-ткани Σ_p. Тогда, как это следует из (2), $a^i_j = 0$ $(i \neq j)$. Пусть $\hat{R}^y = \{y, \vec{\bar{e}}_i, \vec{\hat{e}}_\alpha\}$. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{y} &= \hat{\omega}^i \vec{\bar{e}}_i + \hat{\omega}^\alpha \vec{\hat{e}}_\alpha, \\ d\vec{\bar{e}}_i &= \hat{\omega}^j_i \vec{\bar{e}}_j + \hat{\omega}^\alpha_i \vec{\hat{e}}_\alpha, \qquad (5) \\ d\vec{\hat{e}} &= \hat{\omega}^i_\alpha \vec{\bar{e}}_i + \hat{\omega}^\beta_\alpha \vec{\hat{e}}_\beta. \end{aligned}$$

Так как $\vec{\bar{e}}_i = f_{*x}(\vec{e}_i)$, то $\hat{\omega}^i = \bar{\omega}^i = \omega^i$. Дифференцируя тождества $\vec{\hat{e}}_\alpha \cdot \vec{\bar{e}}_i = 0$ и учитывая выражения для векторов $\vec{\hat{e}}_\alpha$ и формулы (5), получим

$$\omega^j_\alpha = -\bar{\gamma}^{ij}\hat{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{\Lambda}^\beta_{iL}\omega^L, \qquad (6)$$

где $\bar{\Lambda}^\beta_{iL}$ — подобъект первого фундаментального распределения $\bar{\Delta}_p$, причем $\bar{\Lambda}^\beta_{iL} = \Lambda^\beta_{iL} + H^\beta_{iL}$, где H^β_{iL} — подтензор H^J_{KL} $(J, K, L = 1, \dots, n)$, для которого $H^J_{KL}\omega^L = \bar{\omega}^J_K - \omega^J_K$, а $\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \vec{\hat{e}}_\alpha \cdot \vec{\hat{e}}_\beta$. Для точки Q нормали $[y, \vec{\hat{e}}_{\alpha_0}]$ имеем $\vec{Q} = \vec{y} + \mu\vec{\hat{e}}_{\alpha_0}$. Требование $d\vec{Q} \in \hat{\Delta}_{n-p}(y)$ при $d\vec{y} \in \bar{\Delta}_p(y)$ приводит к системе $\hat{\omega}^i + \mu\hat{\omega}^i_{\alpha_0} = 0$. Следовательно, учитывая (6) и то, что $\hat{\omega}^i = \bar{\omega}^i = \omega^i$ для определения направлений кривизны площадки $\bar{\Delta}_p(y)$ имеем систему $(\delta^i_j + \mu\bar{a}^i_j)\omega^j = 0$, где

$$\bar{a}^i_j = -\bar{\gamma}^{it}\hat{\gamma}_{\alpha_0\beta}\bar{\Lambda}^\beta_{tj} \qquad (8)$$

и $\bar{a}^i_j$, как видно из (8), есть аффинор. Отсюда вытекает следующая

Т е о р е м а. Для того, чтобы p-ткань $\bar{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ была p-тканью линий кривизны распределения $\bar{\Delta}_p$ относительно нормали $[y, \vec{\hat{e}}_{\alpha_0}]$ необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{\bar{e}}_i$ были собственными векторами аффинора $\bar{a}^i_j$. Можно показать, что в общем случае p-ткань $\bar{\Sigma}_p$ не является p-тканью линий кривизны относительно указанной нормали, но в ряде частных случаев это выполняется.

С л е д с т в и е. Если отображение f конформно и а/ p-ткань Σ_p ортогональна, б/ распределение Δ_p вполне интегрируемо, в/ $H^{\alpha_0}_{ij} = 0$ (в частности, если линии p-ткани Σ_p являются характеристическами),то в каждом из этих случаев p-ткань $\overline{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ является p-тканью линий кривизны относительно соответствующей нормали.

Действительно, так как f конформно,то $\overline{\gamma}_{JZ} = \lambda \gamma_{JZ}$ $(J,Z=1,\dots,n)$ и $\hat{\Delta}_{n-p} = \overline{\Delta}_{n-p}$, где $\overline{\Delta}_{n-p} = f_*(\Delta_{n-p})$. Соотношение (4) дает $\hat{\vec{n}} = \vec{\overline{n}}$, в частности $\hat{\vec{e}}_\alpha = \vec{\overline{e}}_\alpha$. Из (3) и (8) вытекает

$$\overline{a}^i_j = a^i_j - \gamma^{it} H^{\alpha_0}_{tj} \qquad (9)$$

В случае а), учитывая, что ортогональный репер R^x переходит в отображении f в ортогональный репер R^y, можно показать, что $H^J_{KZ} = 0$ $(J=K, J\neq Z, Z\neq K)$, в частности, $H^{\alpha_0}_{ij} = 0$ $(i\neq j)$. Формулы (9) дают $\overline{a}^i_j = 0$ $(i\neq j)$.

В случае б), так как распределение Δ_p вполне интегрируемо, то p-ткань Σ_p ортогональна, и мы приходим к случаю а).

В случае в) имеет место соотношение $\overline{a}^i_j = a^i_j = 0$ $(i\neq j)$.

Список литературы

1.Тихонов В.А. Сети,определяемые распределениями в аффинном пространстве и их обобщения.-В сб.:Проблемы геометрии.Т.8.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР. М.,1977,с.197-223.

2.Шинкунас Ю.И. О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве.-Труды геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР.М.,1974,т.5,с.123-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

Г. Матиева

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ

В работе рассмотрены ортогонально дополнительные распределения Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ в евклидовом пространстве E_n. С помощью этих распределений построена сеть $\widetilde{\Sigma}_n$ и изучены некоторые ее свойства.

1.Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\mathcal{R}=(x,\vec{e}_A)$, где $x \in E_n$ и $|\vec{e}_A|=1$ $(A,B,C=1,2,\dots,n)$. Деривационные формулы репера имеют вид $d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A$, $d\vec{e}_A = \omega^B_A \vec{e}_B$. Формы ω^A, ω^B_A удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики $dg_{AB} = g_{AK}\omega^K_B + g_{KB}\omega^K_A$, где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$-ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n, и структурным уравнениям $\mathcal{D}\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B$, $\mathcal{D}\omega^B_A = \omega^K_A \wedge \omega^B_K$.

Рассмотрим в E_n распределение Δ_p $(1<p<n-1)$ и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p$ репера расположим в подпространстве $\Delta_p(x)$, а векторы $\vec{e}_{p+1},\dots,\vec{e}_n$ - в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(x)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iA}\omega^A \quad (i,j,k=1,\dots,p;\ \alpha,\beta,\gamma=p+1,\dots,n), \qquad (1)$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(x)$, то $\omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha A}\omega^A$.

Система величин $\{\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{i\varphi}\}$ образует геометрический объект-фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [4].При этом компоненты Λ^α_{ij} и $\Lambda^\alpha_{i\varphi}$ образуют тензоры в отдельности.Векторы

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij}\Lambda^\alpha_{(ij)}\vec{e}_\alpha, \qquad \vec{\overline{M}}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\alpha\varphi}\Lambda^i_{(\alpha\varphi)}\vec{e}_i$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно [3]. Если вектор средней кривиз-